

Засельський В.Й., Пополов Д.В.

**Математична модель руху сіячої поверхні грохоту в умовах її ударно-вібраційної дії**

Zaselskyi V.Y., Popolov D.V.

**A mathematical model of the motion of the screening surface under the conditions of its impact vibration action**

У статті представлений комплексний підхід до вирішення актуальної проблеми підвищення ефективності грохочення шихтових матеріалів, що має важливе значення для металургійного виробництва. Метою досліджень є розробка математичної моделі руху вільно укладеної сіячої поверхні грохота в умовах її вібраційно-ударної дії. Для досягнення поставленої мети в роботі використовується поетапний системний аналіз теоретичного дослідження руху сіячої поверхні, котра розглядається як матеріальна точка, рух якої обмежено певним інтервалом, і розбитий на шість характерних етапів, кожен з яких аналізується окремо. У результаті дослідження було розроблено диференціальне рівняння руху сіячої поверхні та отримано залежності, які дозволяють описати її рух у різних динамічних станах враховуючи сили інерції, пружні деформації, сили тяжіння та тертя. Визначені умови, за яких відбувається резонанс і підвищується інтенсивність підкидання сита. Це дозволяє мінімізувати явище забиття отворів сіячої поверхні, що, у свою чергу, підвищує ефективність процесу відсіву. Наукова новизна дослідження полягає в розробці нової математичної моделі, яка описує рух вільно укладеної сіячої поверхні в умовах її вібраційно-ударної дії. Це дозволяє вперше детально вивчити процеси, що відбуваються під час грохочення, і визначити оптимальні умови для зменшення забиття отворів сіячої поверхні. Результати цього дослідження можуть бути використані для вдосконалення процесу підготовки залізовмісної сировини до переплаву, що є актуальним завданням для металургійної промисловості. Застосування розробленої математичної моделі дозволить підвищити ефективність відсіву дріб'язкових фракцій, зменшити забиття отворів сіячої поверхні, що покращить загальну якість металургійних процесів. Це, в свою чергу, сприятиме економії ресурсів та зниженню витрат у виробництві.

**Ключові слова:** грохочення, математична модель, ударно-вібраційна дія, ефективність відсіву, забиття отворів, металургійне виробництво.

The article presents an integrated approach to solving the actual problem of increasing the efficiency of screening charge materials, which is important for metallurgical production. The aim of the research is to develop a mathematical model of the motion of a loosely stacked screening surface under the conditions of its vibration and impact action. To achieve this goal, we have used a step-by-step systematic analysis of the theoretical study of the motion of the sieving surface, which is considered as a material point whose motion limited to a certain interval, and is divided into six characteristic stages, each of which is analyzed separately. As a result of the study, the following were developed a differential equation of motion of the sowing surface and obtained dependencies that allow us to describe its motion in different dynamic states, taking into account the forces of inertia, elastic deformation, gravity, and friction. The conditions under which resonance occurs and the intensity of the sieve tossing increases. This allows minimizing the phenomenon of clogging of the holes of the sieving surface, which, in turn, increases the efficiency of the turn, increases the efficiency of the screening process. The scientific novelty of the study is the development of a new mathematical model that describes the movement of a loosely of a loosely laid sowing surface under the conditions of its vibration and impact action. This allows us to for the first time to study in detail the processes occurring during screening, and to determine the optimal conditions for reducing clogging of the seeding surface holes. The results of this study can be used to improve the process of preparing iron-containing raw materials for remelting, which is an urgent task for the metallurgical industry. The application of the developed mathematical model will increase the efficiency of screening out fines and fractions, reduce clogging of the holes of the screening surface, which will improve the overall quality of metallurgical processes. This, in turn, will help save resources and reduce production costs.

**Key words:** screening, mathematical model, impact vibration action, screening efficiency, hole clogging, metallurgical production.

**Вступ**

В даний час якість підготовки шихтових матеріалів металургійного виробництва в значній мірі залежить від ефективності відсіву дріб'язкових фракцій (0...5 мм) з залізовмісної сировини. Як показує досвід експлуатації різноманітних типів грохотів, збільшення ефективності грохочення шихтових матеріалів утруднене суттєвим забиванням отворів сіячих поверхонь, що не дозволяє підвищити якість підготовки залізовмісної сировини до переплаву.

© Засельський В.Й. - д.т.н., проф. ННТІ ДУЕТ, м.Кривий Ріг  
Пополов Д.В. - к.т.н., доц. ННТІ ДУЕТ, м.Кривий Ріг

Вочевидь для практиків і науковців стає необхідним генерувати, досліджувати та використовувати нові ідеї, які б дозволили зменшити забиття сіячих поверхонь грохота та збільшити ефективність відсіву некондиційних фракцій металургійної шихти перед доменною плавкою. Тому роботи направлені на інтенсифікацію процесу грохочення шляхом зменшення забиття отворів сіячих поверхонь грохота, які використовуються для відсіву дріб'язкового класу в залізовмісних шихтових матеріалах на сьогодні є актуальним завданням.

© Zaselskyi V.Y. - d.t.s. prof SUET, Kryvyi Rih  
Popolov D.V. - c.t.s. docent SUET, Kryvyi Rih



This is an Open Access article under the CC BY 4.0 license <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

### Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Інтенсифікації процесу грохочення мінеральної сировини присвячено багато дослідницьких робіт. Головним чином вони стосуються того, як відповідати на питання, яким способом підвищити динамічні показники робочого органу грохота або його сіячої поверхні, щоб зменшити її захаращеність чи забиття отворів важкопрохідними частинками [1-5]. До грохотів такого типу можна віднести машини з рухливими сіячами поверхнями, у котрих коливання від вібробудників частотою у 100 Гц передаються безпосередньо сіячій поверхні, котра жорстко закріплена на коробі [6], у інших, процес грохочення інтенсифікується за рахунок підвищення прискорень, або згину та розтягу сіячої поверхні [7-11]. Також слід відзначити резонівні сіячі поверхні розроблені Інститутом геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова Національної академії наук України, котрі використовують явища резонансу на натягнутих струнах. Такі сіячі поверхні забезпечують зниження забиття та захаращеності її отворів, однак їх використання не можливе для умов шихтопідготовчих відділень металургійного виробництва оскільки вони мають недостатню надійність і конструктивну складність [12-14].

Для різноманітних динамічних схем вібраційних грохотів і встановлених на них сіячих поверхонь було виконано багато теоретичних досліджень та розроблено математичних моделей руху робочих органів, в той же час для грохотів сіяча поверхня котрих вільно розташована на його коробі таких досліджень проведено не було. Але для удосконалення шихтових грохотів, які фрак-

ціонують залізовмісну металургійну шихту, такі дослідження є дуже важливими.

### Мета і завдання досліджень

Мета роботи полягає в розробці математичної моделі руху вільно укладеної сіячої поверхні при вібраційно-ударній дії на неї для зменшення забиття її отворів важкопрохідними частинками.

### Матеріали та методи досліджень

При розробці математичної моделі руху сіячої поверхні грохота в умовах її вібраційно-ударної дії теоретичні дослідження виконувались з використанням поетапного системного аналізу. На рис. 1 наведена загальна розрахункова схема руху сіячої поверхні, де умови зв'язку, котрі прикладені до неї, дозволяють обмежити її рух в проміжку  $\delta_h$ .

Сіячу поверхню представляємо в якості матеріальної точки  $C$  розташованої в центрі мас системи, що розглядається, а її пружну деформацію приймаємо за усереднену деформацію пружних елементів з жорсткістю  $c_{sr}$ . Масу коробки позначено як  $M$ , а масу сіячої поверхні з центром мас в точці  $C$  як  $m$ . Тоді на точку  $C$  може бути послідовно накладено два односторонніх зв'язки, при вибиранні проміжку  $\delta_h$  вздовж вісі  $y_1$ . Ці зв'язки виникають по мірі зіткнення маси  $m$  з нижньою та верхньою площинами внутрішньої поверхні швелероподібного підситника. Розділимо процес циклічного руху механічної системи, при коливаннях коробки, на шість характерних етапів. Приймаємо, що в початковому положенні маса  $m$  знаходиться в статичній рівновазі, спираючись на нижню площину підситника.

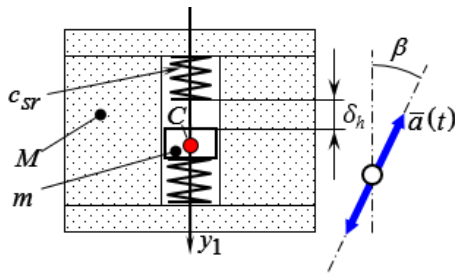


Рисунок 1 – Загальна розрахункова схема

### Результати досліджень

Розглянемо перший етап руху сіячої поверхні. В цьому випадку матеріальна точка спирається на пружну основу відомої жорсткості (рис. 2), а її рух приймаємо таким, що повністю підкорюється

руху коробки. Маса коробки вважається настільки переважальною над масою матеріальної точки, що зміною закону руху коробки при взаємодії з точкою можна знехтувати.

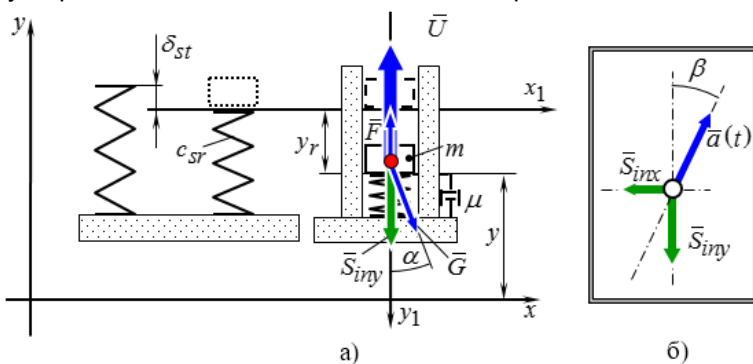


Рисунок 2 – Розрахункові схеми при спільному розгоні коробу та сіячої поверхні (а), для визначення напрямку сил інерції (б)

Нехай рух коробки відповідає гармонійному закону, характерному для однорідного вібраційного поля з лінійним полем траєкторій його точок, що є законом переносного руху

$$\begin{cases} x_e(t) = A \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin \beta \\ y_e(t) = A \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos \beta, \end{cases} \quad (1)$$

де  $A$  – амплітуда коливань вздовж напрямку руху, м;  $\omega$  – кругова частота коливань коробки,  $c^{-1}$ ;  $\beta$  – кут вібрації точок коробки (від нормалі к сіячої поверхні до лінії вібрації).

Тоді, у відповідній системі координат  $x_1 y_1$  (див. рис. 2) сили інерції переносного руху у відповідності до (1)(1) будуть мати абсолютну величину

$$\begin{cases} S_{inx} = m \cdot A \cdot \sin \beta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \\ S_{iny} = m \cdot A \cdot \cos \beta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t). \end{cases} \quad (2)$$

Оскільки, в цьому динамічному стані системи розглядалась лише пружна деформація сіячої поверхні при нерухомому її периметрі, то силою інерції вздовж вісі  $x_1$  будемо нехтувати.

Тоді, основний закон динаміки для відносного руху запишеться у вигляді

$$m \cdot \ddot{y}_r = -U + S_{iny} + G \cdot \cos \alpha - F, \quad (3)$$

де  $\ddot{y}_r$  – відносне прискорення точки,  $m/c^2$ ;  $\alpha$  – кут нахилу сіячої поверхні до горизонту, град;  $U$  – сила пружності пружини, еквівалентна пружності сіячої поверхні, яка визначається за формулою

$$U = c_{sr} \cdot y_r H; \quad (4)$$

$G$  – сила тяжіння

$$G = m \cdot g, H, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y_r = e^{-ht} \left[ \frac{\dot{y}_{r0} + y_{r0} h}{\sqrt{k^2 - h^2}} \sin(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) + y_{r0} \cdot \cos(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) \right] - \\ - e^{-ht} \left[ \frac{D}{\sqrt{k^2 - h^2}} (h \cdot \sin \gamma + \omega \cdot \cos \gamma) \cdot \sin(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) + \right. \\ \left. + D \cdot \sin \gamma \cos(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) \right] + D \cdot \sin(\omega t + \gamma), \end{aligned} \quad (12)$$

де  $\dot{y}_{r0}$  – початкова відносна швидкість матеріальної точки,  $m/c$ ;  $y_{r0}$  – початкова координата відносного положення матеріальної точки.

Для спрощення у виразі (12) були введені додаткові позначення

$$D = \frac{H}{k^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right) + 4 \frac{h^2 \cdot \omega^2}{k^4}}}; \quad (13)$$

$$\gamma = -\arctg \left( \frac{2 \cdot h \cdot \omega}{k^2 - \omega^2} \right). \quad (14)$$

На підставі отриманого рішення був визначений коефіцієнт динамічності підчас відносного розгону сита

$$K_{din} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right) + 4 \cdot \frac{h^2 \cdot \omega^2}{k^4}}} \quad (15)$$

де  $m$  – маса матеріальної точки (сіячої поверхні);  $g$  – прискорення вільного падіння,  $m/c^2$ ;  $F$  – сила в'язкого супротиву

$$F = \mu \cdot \dot{y}_r H, \quad (6)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт в'язкого тертя,  $kg/c$ .

Зважаючи на те, що сила тяжіння  $G$  компенсується силою пружності матеріалу — складають зрівноважену систему сил, то згідно аксіоми 2 статички [15] їх можна відкинути, що дає змогу розглядати лише динамічну складову.

Перетворюємо вираз (3), враховуючи вищевикладене та вирази (2), (4-6)

$$\ddot{y}_r + \frac{\mu}{m} \cdot \dot{y}_r + \frac{c_{sr}}{m} \cdot y_r = A \cdot \cos \beta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t). \quad (7)$$

Рішення диференційного рівняння (7) виконувалось за методикою, викладеною [16], для зручності були введені наступні позначення

$$\frac{\mu}{m} = 2 \cdot h; \quad (8)$$

$$\frac{c_{sr}}{m} = k^2; \quad (9)$$

$$A \cdot \cos \beta \cdot \omega^2 = H. \quad (10)$$

Тоді вираз (7) прийме вигляд

$$\ddot{y}_r + 2 \cdot h \cdot \dot{y}_r + k^2 \cdot y_r = H \cdot \sin(\omega t). \quad (11)$$

Рішення диференційного рівняння (11) дозволяє визначити закон відносного руху матеріальної точки при першому виді динамічного стану

який приймає максимальне значення за умови

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{h^2}{k^2}}. \quad (16)$$

А його максимальне значення дорівнює

$$[K_{din}]_{max} = \frac{1}{2 \cdot \frac{h}{k} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right)}} \quad (17)$$

З отриманих залежностей можна зробити висновки, що при

$$\frac{\omega}{k} = \omega \cdot \sqrt{\frac{m}{c_{sr}}} = 1 \quad (18)$$

спостерігається явище резонансу. При цьому,

якщо

$$\frac{h}{k} = \frac{\mu}{2 \cdot \sqrt{m \cdot c_{sr}}} = 0, \quad (19)$$

то при виконанні умови (18) коефіцієнт динамічності  $K_{din} = \infty$ .

При умові, що дотримується нерівність

$$\left(\frac{h}{k}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\mu^2}{4 \cdot m \cdot c_{sr}} \geq \frac{1}{2}, \quad (20)$$

явище резонансу зникає.

Незважаючи на односторонній зв'язок процес пружних коливань не підтримується через розрив зв'язку, тенденція до виникнення явища резонансу дозволяє забезпечити інтенсивне підкидання сита. Таким чином, на початковому етапі необхідно забезпечити умову

$$\omega \sqrt{\frac{m}{c_{sr}}} = 1; \quad (21)$$

$$\frac{\mu}{2 \sqrt{m \cdot c_{sr}}} \rightarrow \min. \quad (22)$$

Відрив сита від нижньої площини внутрішньої поверхні підситника в кінці першого етапу характерний тим, що в цей момент, при відсутності сили тертя, сила пружності пружини, як реакція опори, дорівнює нулю, а координати точки дорівнюють знятої статичної деформації опори. Тоді умова відриву з урахуванням спрямованості вісі відносної системи координат  $x_1y_1$  (див. рис. 2) прийме вид

$$\ddot{y}_r = g \cdot \cos \alpha, \quad (23)$$

чи

$$y_{r1} = -\frac{m \cdot g}{c_{sr}} \cdot \cos \alpha. \quad (24)$$

Кінець першого етапу циклічного руху системи визначається підстановкою виразу (24) в (12), розв'язування утвореного рівняння чисельним методом дозволяє визначити момент  $t_1$  відриву матеріальної точки від опори, а похідна за часом від (24) з урахуванням  $t_1$  дозволяє визначити кінцеву швидкість  $V_{r1}$  наприкінці першого етапу.

Таким чином, отримані залежності дозволяють визначити початкові умови — швидкість і координати матеріальної точки, для переходу до математичного опису другого динамічного стану системи.

Розглянемо другий етап. В цьому випадку короб і сіяча поверхня, котра має один ступінь свободи у нормальному до опорної поверхні швелероподібного підситника напрямку, рухаються роздільно.

Після відриву матеріальної точки від опорної поверхні вона переміщується в просторі, утвореним підситником, під дією сили тяжіння (5) та тертя

$$R = k \cdot N \text{ Н}, \quad (25)$$

де  $k$  — коефіцієнт тертя спокою пари «сіяча поверхня — стінки підситника»;  $N$  — сила нормальної реакції стінки підситника, Н; у абсолютній системі координат  $xy$ , та під дією додаткових сил інерції (2) у відносній системі координат  $x_1y_1$  (рис. 3), що виникають від переносного руху коробу за законом динаміки для відносного руху матеріальної точки. Таким чином, для заданої схеми прикладання сил, вибраного напрямку осей координат (див. рис. 3) у відповідності до основного закону динаміки відносного руху точки, маємо

$$\begin{cases} G \cdot \sin \alpha + N - S_{inx} = 0 \\ G \cdot \cos \alpha - R + S_{iny} = m \cdot \ddot{y}_r \end{cases} \quad (26)$$

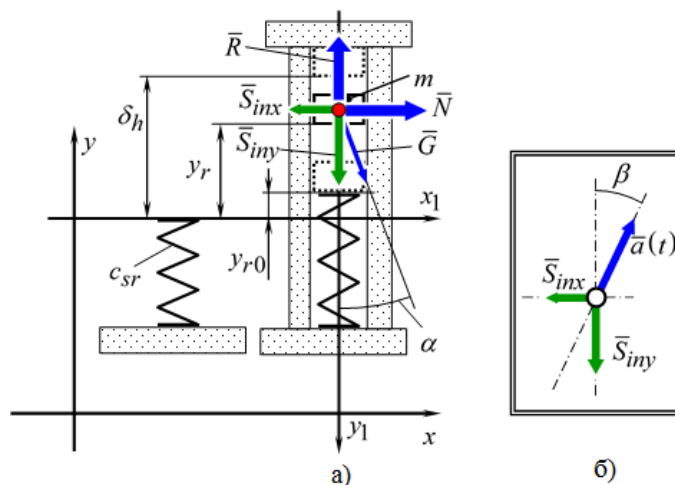


Рисунок 3 – Розрахункова схема ковзання сіячої поверхні в просторі, утвореним підситником, (а) та визначення напрямку сил інерції (б)

Перетворимо вираз (26) враховуючи (2), (5), (25)

$$\begin{cases} m \cdot g \cdot \sin \alpha + N - m \cdot A \cdot \sin \beta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) = 0 \\ m \cdot g \cdot \cos \alpha - k \cdot N + m \cdot A \cdot \cos \beta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) = m \cdot \ddot{y}_r \end{cases} \quad (27)$$

З першого рівняння системи (27) визначаємо нормальну реактивну силу

$$N = m \cdot A \cdot \sin \beta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) - m \cdot g \cdot \sin \alpha. \quad (28)$$

Підставимо знайдене значення в друге рівняння системи (27), представляючи відносне прискорення точки  $\ddot{y}_r$  через швидкість відносного руху матеріальної точки вздовж простору, утвореному підситником,  $\dot{V}_{ry}(t)$

$$\dot{V}_{ry}(t) = g \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) + A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) \cdot (\cos \beta - k \cdot \sin \beta). \quad (29)$$

Розв'язання диференційного рівняння (29), враховуючи початкову швидкість процесу відносного руху, яка дорівнює кінцевій швидкості точки на попередньому етапі в момент розриву зв'язку між сіячою поверхнею та опорною поверхнею підситника, яка визначається диференціюванням

$$\begin{cases} V_{r2} = g \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) \cdot t_2 - A \cdot \omega \cdot \cos[\omega \cdot (t_2 + t_1)] \times \\ \quad \times (\cos \beta - k \cdot \sin \beta) + V_{r1} \\ -\delta_h = 0,5 \cdot g \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) \cdot t_2^2 - A \cdot \sin[\omega \cdot (t_2 + t_1)] \times \\ \quad \times (\cos \beta - k \cdot \sin \beta) + V_{r1} \cdot t_2 + y_{r1} \end{cases} \quad (32)$$

В системі (32) у тригонометричному виразі, яке визначає гармонійний закон руху коробу, використовується абсолютний час руху, котрий відраховується від нульового початкового моменту — це сума тривалості першого та другого станів руху  $t_2 + t_1$ .

На третьому етапі сіяча поверхня впирається у верхню опорну площину підситника та зупиняється. Частина сіячої поверхні, що не контактує з опорною площиною підситника продовжує рух у тому ж напрямку прогинаючись, в межах пружності сіячої поверхні, досягаючи максимально можливої стрілу прогину. Після досягнення максимального прогину починається четвертий етап руху сіячої поверхні — її відскоку від верхньої опорної площини підситника під дією сили пружності. При цьому опорна поверхня сита залишається неру-

хвою, переміщується лише розтягнуте тіло сіячої поверхні.

$$\begin{aligned} V_{ry}(t) = & g \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) \cdot t - \\ & - A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \times \\ & \times (\cos \beta - k \cdot \sin \beta) + V_{r1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Після інтегрування отриманого виразу (30) будемо мати закон відносного руху матеріальної точки на етапі її переміщення в просторі, утвореному швелероподібним підситником при початковій координаті  $y_{r1}$ , яка є координатою розриву зв'язку між сіячою поверхнею та опорною поверхнею швелероподібного підситника на попередньому етапі

$$\begin{aligned} y_r(t) = & 0,5 \cdot g \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) \cdot t^2 - \\ & - A \cdot \sin(\omega t) \times \\ & \times (\cos \beta - k \cdot \sin \beta) + V_{r1} \cdot t + y_{r1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Кінцеві параметри даного етапу визначаються з системи алгебраїчних рівнянь, утворених на підставі виразів (30) та (31).

Зважаючи на це в розрахунковій схемі сил, прикладених до матеріальної точки (рис. 4), допустимо виключити взаємо урівноважені між собою сили — силу інерції в поперечному напрямку до простору, утвореному швелероподібним підситником, та силу реакції поверхні вертикальної стінки швелероподібного підситника, яка утворює простір у вертикальній площині. Сила тертя на третьому та четвертому етапах відсутня внаслідок нерухомості опорної поверхні сита в просторі, утвореному підситником. Рухається лише центр мас сита, котрий ми приймаємо за досліджувану матеріальну точку, за рахунок його пружної деформації.

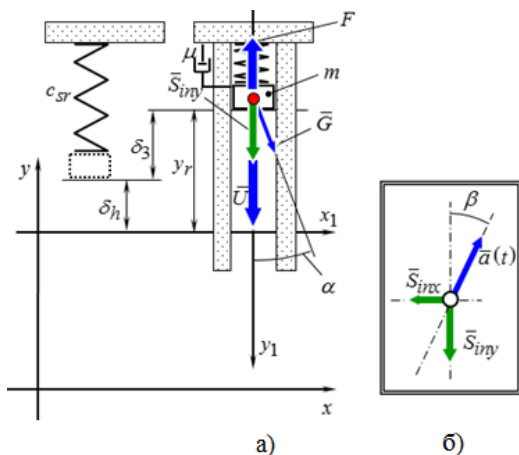


Рисунок 4 – Розрахункова схема удару сіячої поверхні по підситнику, відскоку від верхньої опорної площини підситника (а), для визначення напрямку сил інерції(б)



В той час, тіло сіячої поверхні, як і на першому етапі, прийняте за пружину з усередненою жорсткістю  $c_{sr}$ . Внаслідок внутрішнього тертя та аеродинамічних втрат відбувається дисипація енергії в процесі руху пружного тіла, яка враховується за допомогою емпіричного коефіцієнта  $\mu$ , еквівалентного коефіцієнту в'язкого тертя.

Враховуючи сталість розташування прийнятих систем координат та викладених вище допущень, основний закон динаміки для відносного руху матеріальної точки прийме вид

$$U + S_{iny} + G \cdot \cos \alpha - F = m \cdot \ddot{y}_r \quad (33)$$

$$y_r = e^{-h \cdot t} \cdot \left[ \frac{\dot{y}_{r0} + y_{r0} h}{\sqrt{k^2 - h^2}} \cdot \sin(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) + y_{r0} \cdot \cos(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) \right] - e^{-h \cdot t} \cdot \left[ \frac{D}{\sqrt{k^2 - h^2}} \cdot (h \cdot \sin \gamma + \omega \cdot \cos \gamma) \cdot \sin(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) + D \cdot \sin \gamma \cos(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) \right] + D \cdot \sin(\omega t + \gamma) + \frac{g}{k^2} \cdot \cos \alpha \quad (35)$$

З урахуванням сили тертя в просторі, утвореним підситником, рівняння для розрахунку моменту відриву матеріальної точки від підситника, в той же час, цей момент є початком етапу ковзання опорної поверхні сита в межах проміжку  $\delta_h$ , буде мати вид

$$U + G \cdot \cos \alpha - R = 0, \quad (36)$$

чи

$$y_{r4} = \frac{1}{c_{sr}} (R - mg \cdot \cos \alpha). \quad (37)$$

Беручи до уваги систему (2) залежності (4-6) вираз (33) прийме вид

$$\ddot{y}_r + \frac{\mu}{m} \cdot \dot{y}_r - \frac{c_{sr}}{m} \cdot y_r = A \cdot \omega^2 \cdot \cos \beta \cdot \sin(\omega t) + g \cdot \cos \alpha. \quad (34)$$

Враховуючи методику [16] та ведені позначення (8-10), (13, 14), рішення диференційного рівняння (34) дозволяє визначити закон відносного руху матеріальної точки при третьому динамічному стані системи

Підставляючи значення  $y_{r4}$  в (35) ми отримаємо час закінчення четвертого етапу  $t_4$ .

Похідна за часом від виразу (35) з підстановкою  $t_4$  дозволяє вирахувати кінцеву швидкість  $V_{r4}$  на четвертому етапі.

На п'ятому етапі після відриву матеріальної точки від контакту з верхньою опорною поверхнею швелероподібного підситника, вона рухається під дією сили тяжіння та тертя в абсолютній системі координат  $xu$ , а також під дією сил інерції в відносній системі координат  $x_1y_1$  (див. рис. 5).

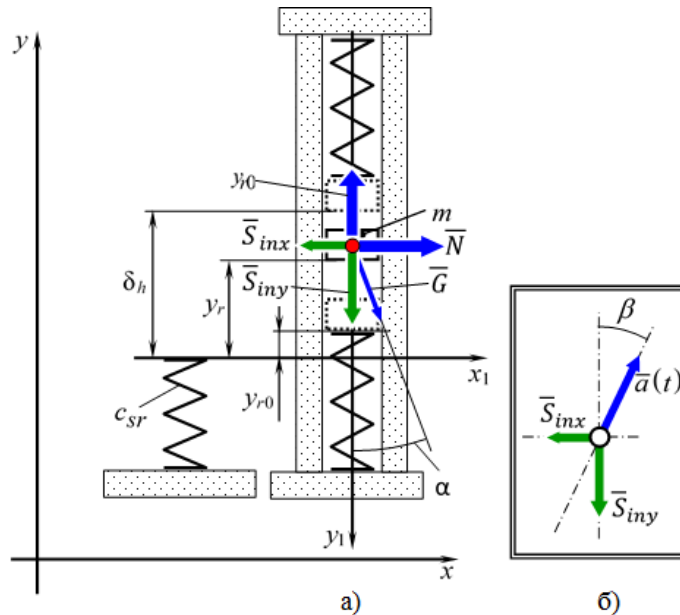


Рисунок 5 – Розрахункова схема ковзання сіячої поверхні в просторі, утвореному підситником, (а), визначення напрямку сил інерції (б)

Тоді, основний закон динаміки відносного руху матеріальної точки прийме вид

$$\begin{cases} G \cdot \sin \alpha + N - S_{inx} = 0 \\ G \cdot \cos \alpha - R + S_{iny} = m \cdot \ddot{y}_r \end{cases} \quad (38)$$

Перетворимо систему рівнянь (38) з враху-

ванням (2), (5), (25), визначивши з першого рівняння системи (38) нормальну реактивну силу  $N$ , підставивши її в друге рівняння системи, представляючи прискорення точки  $\ddot{y}_r$  через швидкість відносного руху матеріальної точки вздовж простору, утвореному підситником, отримуємо дифе-

ренційне рівняння, розв'язання котрого, враховуючи початкову швидкість процесу відносного руху, яка дорівнює кінцевій швидкості точки на четвертому етапі в момент розриву зв'язку  $V_{r4}$ , яка визначається диференціюванням рівняння (35) враховуючи  $t_4$ , дозволяє отримати швидкість відносного руху матеріальної точки вздовж простору, утвореному підситником

$$V_{ry}(t) = g \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) \cdot t - A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \times (\cos \beta - k \cdot \sin \beta) + V_{r4}. \quad (39)$$

$$\begin{cases} V_{r5} = g \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) t_5 - A \cdot \omega \cdot \cos[\omega \cdot (t_5 + \dots + t_1)] \times \\ \quad \times (\cos \beta - k \cdot \sin \beta) + V_{r4} \\ 0 = 0,5 \cdot g \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) t_5^2 - A \cdot \sin[\omega \cdot (t_5 + \dots + t_1)] \times \\ \quad \times (\cos \beta - k \cdot \sin \beta) + V_{r4} \cdot t_5 + y_{r4} \end{cases} \quad (41)$$

В системі (41) у тригонометричному виразі, що визначає коливання коробу, вводиться абсолютний час руху, котрий відлічується від нульового, початкового моменту — це сума тривалості від першого до п'ятого етапів руху включно ( $t_5 + \dots + t_1$ ).

Шостий етап настає після появи контакту опорної поверхні сита з нижньою опорною площиною швелероподібного підситника в кінці п'ятого етапу, ковзання опорної поверхні сита в просторі, утвореному підситником, припиняється,

Після інтегрування виразу (39) отримуємо закон відносного руху матеріальної точки на п'ятому етапі при початковій координаті  $y_{r4}$

$$y_r(t) = 0,5 \cdot g \cdot (\cos \alpha + k \cdot \sin \alpha) \cdot t^2 - A \cdot \sin(\omega t) \times (\cos \beta - k \cdot \sin \beta) + V_{r4} \cdot t + y_{r4}. \quad (40)$$

Тривалість  $t_5$  та кінцеву швидкість п'ятого етапу визначаємо з системи алгебраїчних рівнянь, утвореної на підставі (39) та (40)

тому при записі основного закону динаміки для відносного руху матеріальної точки, нехтуючи складовою сили інерції вздовж вісі  $x_1$  (рис. 6)

$$m \cdot \ddot{y}_r = -U + S_{iny} + G \cdot \cos \alpha - F. \quad (42)$$

Враховуючи (2), (4-6) вираз (42) прийме вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_r + \frac{\mu}{m} \cdot \dot{y}_r + \frac{c_{sr}}{m} \cdot y_r = \\ = A \cdot \cos \beta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) + g \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (43)$$

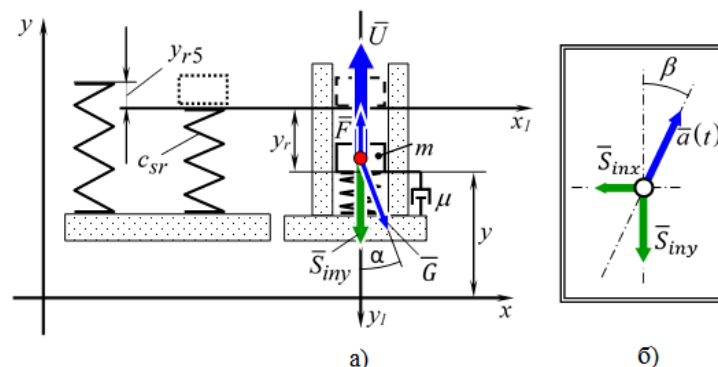


Рисунок 6 – Розрахункова схема при спільному розгоні коробу та сіячої поверхні (а), визначення напрямку сил інерції (б)

Беручи до уваги методику [16] та введенні позначення (8-10), (13), вирішуючи диферен-

ційне рівняння (43) отримуємо закон відносного руху матеріальної точки

$$\begin{aligned} y_r = e^{-h \cdot t} \cdot \left[ \frac{\dot{y}_{r0} + y_r \cdot h}{\sqrt{k^2 - h^2}} \cdot \sin(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) + y_{r0} \cdot \cos(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) \right] - \\ - e^{-h \cdot t} \cdot \left[ \frac{D}{\sqrt{k^2 - h^2}} \cdot (h \cdot \sin \gamma + \omega \cdot \cos \gamma) \cdot \sin(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) + D \times \right. \\ \left. \times \sin \gamma \cdot \cos(t \cdot \sqrt{k^2 - h^2}) \right] + D \cdot \sin(\omega t + \gamma) + \frac{g}{k^2} \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (44)$$

На підставі закону збереження енергії визначається максимум функції відносного положення  $y_{r6}$ . Підстановка цього значення в (44) дозволяє вирахувати момент  $t_6$  закінчення шостого етапу.

Похідна за часом з підстановкою  $t_6$  дозволяє вирахувати кінцеву швидкість  $V_{r6}$  на шостому етапі.

Шостим етапом цикл руху сіячої поверхні завершується. Кінцеві параметри шостого етапу є початковими параметрами для першого етапу наступного циклу руху сіячої поверхні. Фізично шостий і перший етапи є нерозривним процесом. З цього випливає можливість об'єднання математичних моделей цих етапів в єдину модель.

**Висновки**

Встановлено, що рух вільно укладеної сіячої поверхні на короби грохоту при віброударній дії на неї може бути описаний поетапно, де початок етапу є закінчення його попереднього. Існує тісний часовий та координатний зв'язок де всі кінематичні параметри кожного попереднього етапу є початковими параметрами для наступного суміжного з ним, що дозволяє розробити математичну модель руху вільно укладеної сіячої поверхні при вібраційно-ударної на неї дії.

В результаті розробки математичної моделі встановлено три основні види динамічного стану технічної системи, що розглядається, а саме.

Перший вид динамічного стану — це спільний рух підпружиненої матеріальної точки  $C$  та короби, який починається з моменту зіткнення складових системи при відомій координаті початкового положення, а також відомої початкової швидкості складових системи, що вступили в взаємодію. Початкові параметри взаємодії є кінцевими

параметрами попереднього циклу руху. Цей динамічний стан властивий першому та шостому етапів циклічного руху системи.

Другий вид динамічного стану — роздільний рух елементів системи, який починається з моменту розриву зв'язку на кінці першого чи третього етапів циклічного руху системи та закінчується з моменту відновлення зв'язку на третьому чи шостому етапах. Тривалість цього динамічного стану визначається не тільки швидкістю руху елементів системи, але й, насамперед, конструктивним параметром — проміжком  $\delta_h$ . Цей динамічний стан повністю відповідає другому та п'ятому етапам циклічного руху системи.

Третій вид динамічного стану системи — пружна взаємодія складових системи через пружину після поновлення зв'язку. Цей динамічний стан властивий третьому та четвертому стану циклічного руху системи.

**Перелік посилань**

1. Совершенствование технологии и оборудования агломерационного производства / И. М. Мищенко та ін. *Металлургические процессы и оборудование*. 2011. № 3. С. 35-44.
2. Червоненко А. Г., Морус В. Л. Износостойкие динамически активные просеивающие поверхности из эластомеров для разделения сыпучих материалов и пульп. *Труды II Международного симпозиума по механике эластомеров*. Дніпро, 1997. Т.1. С. 296-310.
3. Засельский В. И., Зайцев Г. Л., Китаев Е. И. Промышленные исследования работы резонирующих просеивающих поверхностей. *Теория и практика металлургии*. 2009. № 5-6. С. 15-18.
4. Kinematics characteristics of the vibrating screen with rigid-flexible screen rod and the behavior of moist coal particles during the dry deep screening process / H. Jiang et al. *Powder technology*. 2017. Vol. 319. P. 92-101. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.06.036>.
5. Удосконалення обладнання та процесів вуглелітотворки і коксортування металургійного виробництва: монографія / В. Й. Засельський, Д. В. Пополов та ін. Кривий Ріг: Літерія, 2019. 203 с.
6. Screening machines & screeners // Siebmaschinenhersteller Nr.1- RHEWUM GmbH: [Website]. URL: <https://www.rheum.com/en> (дата звернення: 01.04.2022).
7. Research on Static and Dynamic Characteristics of Shear Spring of the Vibrating Flip-Flow Screen / G. Zhao et al. *Symmetry*. 2020. Vol. 12, no. 10. P. 1644. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym12101644>.
8. Gong S., Oberst S., Wang X. An experimentally validated rubber shear spring model for vibrating flip-flow screens. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2020. Vol. 139. P. 106619. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106619>.
9. Vibrating screen for solids and liquids - Heilig Mixing Technology. *Heilig Mixing Technology*. URL: <https://www.heiligmixers.com/products/screening-machine/vibrating-screen/> (дата звернення: 09.04.2022).
10. Технология Kroosh. *Multifrequencyequipment*. Kroosh Technologies Ltd. URL: <http://kroosh.com/ru/tehnologiya> (дата звернення: 17.04.2022).
11. Червоненко А. Г., Морус В. Л. Износостойкие динамически активные просеивающие поверхности из эластомеров для разделения сыпучих материалов и пульп. *Труды II Международного симпозиума по механике эластомеров*. Дніпро, 1997. Т.1. С. 296-310.
12. Надутый В. П., Гольдин А. А., Погребженский Г. А. Использование резонирующих ленточно-струнных сит в конструкциях вибрационных грохотов. *Кокс и химия*. 1991. № 8. С. 27-28.
13. Полічастотні грохоти для тонкої класифікації і зневоднення подрібнених уранових руд та відходів їх переробки / В. Г. Шевченко та ін. *Геотехнічна механіка*. 2017. № 137. С. 80-92.
14. Resonance screens. *Binder+Co*. URL: <https://www.binder-co.com/1124/Resonance-Screens#Basic-Info> (дата звернення: 16.04.2022).
15. Цасюк В. В. Теоретична механіка: навч. посіб. Київ: Центр навч. літ., 2004. 402 с.
16. Цисарж В. В., Марусик Р. И. Математические методы компьютерной графики. Киев: Факт, 2004. 464 с.

**References**

1. Mishchenko, I. M., et al (2011). Sovershenstvovanie tekhnologii i oborudovaniya aglomeratsionnogo proizvodstva. *Metallurgicheskie protsessy i oborudovanie*, (3), 35-44
2. Chervonenko, A. G., & Morus, V. L. (1997). Iznosostoykie dinamicheski aktivnye proseivayushchie poverkhnosti iz elastomerov dlya razdeleniya sypushikh materialov i pul'p. *Trudy II Mezhdunarodnogo simpoziuma po mekhani-ke elastomerov*, Vol. 1, pp. 296-310



3. Zasel'skiy, V. I., Zaytsev, G. L., & Kitach, E. I. (2009). Promyshlennyye issledovaniya raboty rezoniruyushchikh proseivayushchikh poverkhnostey. *Teoriya i praktika metallurgii*, (5-6), 15–18
4. Jiang H., et al. (2017). Kinematics characteristics of the vibrating screen with rigid-flexible screen rod and the behavior of moist coal particles during the dry deep screening process. *Powder technology*, 319, 92-101. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.06.036>
5. Zasel'skiy, V. Y., Popolov, D. V., et al. (2019). *Udoskonalennia obladnannia ta protsesiv vuhlepidhotovky i koksosortu-vannia metalurhiinoho vyrobnytstva*. Literiia
6. Screening machines & screeners. *Siebmaschinenhersteller*, Nr.1- RHEWUM GmbH: [Website]. <https://www.rhewum.com/en>
7. Zhao G., et al. (2020). Research on Static and Dynamic Characteristics of Shear Spring of the Vibrating Flip-Flow Screen. *Symmetry*, 12(10), 1644. <https://doi.org/10.3390/sym12101644>
8. Gong S., Oberst S., & Wang X. (2020). An experimentally validated rubber shear spring model for vibrating flip-flow screens. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 139, 106619. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106619>
9. Vibrating screen for solids and liquids - Heilig Mixing Technology. *Heilig Mixing Technology*. <https://www.heiligmixers.com/products/screening-machine/vibrating-screen/>
10. Tekhnologiya Kroosh. Multifrequencyequipment. Kroosh Technologies Ltd. <http://kroosh.com/ru/tehnologiya>
11. Chervonenko, A. G., & Morus, V. L. (1997). Iznosostoykie dinamicheski aktivnye proseivayushchie poverkhnosti iz elastomerov dlya razdeleniya sypuchikh materialov i pul'p. *Trudy II Mezhdunarodnogo simpoziuma po mekhanike elastomerov*, Vol. 1, pp. 296-310
12. Nadutyi, V. P., Gol'din, A. A., & Pogrebizhenskiy, G. A. (1991). Ispol'zovanie re-zoniruyushchikh lentochno-strunnykh sit v konstruktsiyakh vibratsionnykh grokhotov. *Koks i khimiya*, (8), 27-28
13. Shevchenko, V. H. (2017). Polichastotni hrokhoty dlia tonkoi klasyfikatsii i znevodnennia podribnenykh uranovykh rud ta vidkhodiv yikh pererobky. *Heotekhnichna mekhanika*, 137, 80-92
14. Resonance screens. Binder+Co. URL: <https://www.binder-co.com/1124/Resonance-Screens#Basic-Info>
15. Tsasiuk, V. V. (2004). *Teoretychna mekhanika: navch. posib*. Tsentr navch. lit.
16. Tsysarzh, V. V., & Marusyk, R. Y. Matematycheskiye metody kompiuternoï hrafyky. Fakt

*Надійшла до редколегії / Received by the editorial board: 20.08.2023*  
*Прийнята до друку / Accepted for publication: 20.11.2023*